

## DAUGIAATRAMĖS SIJOS LIEKAMŪJŲ POSLINKIŲ PROGRESINĖ ANALIZĖ

Liudas LIEPA<sup>1</sup>, Agnė GERVYTĖ<sup>2</sup>, Ela JARMOLAJEVA<sup>3</sup>, Juozas ATKOČIŪNAS<sup>4</sup>

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

El. paštas: <sup>1</sup>liudas.liepa@vgtu.lt; <sup>2</sup>agne.gervyte@vgtu.lt;  
<sup>3</sup>ela.jarmolajeva@vgtu.lt; <sup>4</sup>juozas.atkociunas@vgtu.lt

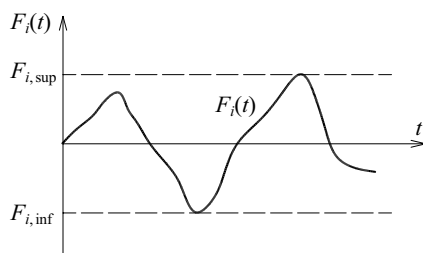
**Santrauka.** Nagrinėjamas idealiai tampriai plastinės lenkiamos strypinės sistemos prisitaikomumo būvis, veikiant kartotinei kintamajai apkrovai. Analizės uždavinių matematiniai modeliai sudaromi, pasitelkus skaitinius metodus, ekstreminius energinius principus ir matematinį programavimą. Parodoma, kad prisitaikant konstrukcijai jos liekamieji poslinkiai gali kisti nemonotoniškai. Išsprendus analizės uždavinį, kuriame progresyviai plečiama apkrovos veikimo sritis, galima nustatyti viršutines ir apatines liekamųjų poslinkių kitimo ribas. Siūloma metodika iliustruota daugiaatramės sijos liekamųjų poslinkių skaičiavimo pavyzdžiu. Rezultatai gauti, esant mažų poslinkių prielaidai.

**Reikšminiai žodžiai:** kartotinė kintamoji apkrova, prisitaikomumas, ekstreminiai energiniai principai, liekamieji poslinkiai.

### Įvadas

Straipsnyje nagrinėjamos idealiai tampriai plastinės lenkiamos strypinės sistemos, veikiamos kartotinės kintamosios apkrovos, prisitaikomumo būvio liekamosios įrašos ir liekamieji poslinkiai (analizės uždavinys). Tai svarbi problema, nes statybines konstrukcijas veikiančios apkrovos retai yra vienkartinės, dažnai jos turi kartotinį kintamą veikimo pobūdį (1 pav.). Kartotinė kintamoji apkrova (KKA) – tai sistema jėgų ar jų grupių, veikiančių nepriklausomai viena nuo kitos (Koiter 1960; Čyras 1983; König 1987; Atkočiūnas 2011). Apkrovos ciklu čia suprantame laiko tarpą  $\tau$ , per kurį pasireiškia visi charakteringi konstrukcijos plastinės deformacijos ir elgsenos etapai.

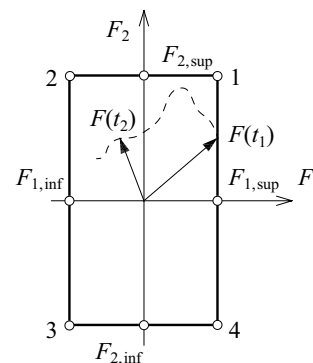
Dažniausiai KKA nusakoma ne konkrečia apkrovimo istorija, t. y. jėgos kitimo per laiką  $t$  dėsnio  $F_i(t)$ , o tik ją sudarančių jėgų viršutinėmis  $F_{i,sup}$  ir apatinėmis  $F_{i,inf}$  kitimo ribomis, kurios nuo laiko  $t$  jau nebeprisiklauso (1 pav.).



1 pav. Apkrova  $F_i(t)$  charakterizuojama savo kitimo ribomis  $F_{i,sup}$  ir  $F_{i,inf}$

Fig. 1. The variation field of force  $F_i(t)$ , between its boundaries  $F_{i,sup}$  and  $F_{i,inf}$

Dviejų sutelktųjų kartotinių kintamųjų jėgų  $\mathbf{F} = [F_1 \ F_2]^T$  atveju jų kitimo sritis užrašoma taip:  $F_{1,inf} \leq F_1(t) \leq F_{1,sup}$  bei  $F_{2,inf} \leq F_2(t) \leq F_{2,sup}$  ir grafiškai vaizduojama stačiakampiu. Šis stačiakampis dar vadinamas jėgų kitimo hodografu (2 pav.). Kiekviena jo viršūnė reiškia jėgų kombinaciją  $\mathbf{F}_j, j = 1, 2, \dots, p = 4, j \in J$ .



2 pav. Dviejų jėgų  $F_1(t)$  ir  $F_2(t)$  veikimo hodografas

Fig. 2. Locus of two forces  $F_1(t)$  and  $F_2(t)$

Konstrukcijos gebėjimą prisitaikyti lemia atsiradusios liekamosios įrašos  $\mathcal{S}_r$ , kurios su pseudotampriomis įrašomis  $\mathcal{S}_{ej}$  suformuoja būvį, nepažeidžiantį takumo (stiprumo)  $f(\mathcal{S}_{ej} + \mathcal{S}_r) \leq \mathcal{S}_0$  sąlygų,  $j \in J$ . Rašant takumo sąlygas tik išorinėms hodografo viršūnėms, KKA atveju išvengiama konkrečių apkrovimo istorijų  $\mathbf{F}(t)$  nagrinėjimo. Taip pateisi-

nami konstrukcijos saugos ribinio būvio reikalavimai, ypač tada, kai pasitelkiama iškiloji takumo sąlyga  $f(\mathbf{S}) \leq S_0$ . Tačiau tikrinant konstrukcijas tinkamumo būvio požiūriu, būtina įvertinti tai, kad liekamieji poslinkiai (įlinkiai)  $\mathbf{u}_r$ , įeinantys į standumo sąlygų tikrinimą, priklauso nuo apkrovimo istorijos  $\mathbf{F}(t)$ . Štai kodėl prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždavinius spręsti sudėtinga, nes disipacinių sistemų deformacijų būvis priklauso nuo apkrovimo istorijos (Weichert, Maier 2002; Weichert, Ponter 2009). Tolesniam daugiaatramės sijos nagrinėjimui pasitelkiamos tiesinės takumo sąlygos  $\Phi(\mathbf{S}) \leq S_0$ .

### Patikslintas konstrukcijos optimizavimo uždavinys

Prisitaikomumo būvio atveju optimizavimo uždavinio pagrindas yra analizės uždavinys.

Konstrukcijos parametrų optimizavimo prisitaikomumo atveju uždavinys formuojamas, kai apkrovos kitimo ribos  $\mathbf{F}_{\text{sup}}$  ir  $\mathbf{F}_{\text{inf}}$  yra žinomos. Ieškomas ribinių įrašų vektorius  $\mathbf{S}_0$ , tenkinantis optimalumo kriterijų  $\min \mathbf{L}^T \mathbf{S}_0$  ir prisitaikomumo bei standumo apribojimus (Skaržauskas *et al.* 2009; Atkočiūnas 2011):

$$\text{rasti} \quad \min \quad \mathbf{L}^T \mathbf{S}_0, \quad (1)$$

$$\text{kai} \quad \boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{S}_0 - \Phi(\mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{S}_{ej}) \geq \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j^T \boldsymbol{\varphi}_j = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \sum_j \boldsymbol{\lambda}_j, \quad (3)$$

$$\mathbf{S}_{0, \text{inf}} \leq \mathbf{S}_0 \leq \mathbf{S}_{0, \text{sup}}, \quad (4)$$

$$\mathbf{u}_{\text{min}} \leq \mathbf{u}_{ej} + \mathbf{u}_{r, \text{inf}}, \mathbf{u}_{ej} + \mathbf{u}_{r, \text{sup}} \leq \mathbf{u}_{\text{max}}, \quad j \in J. \quad (5)$$

Tiesinių takumo sąlygų atveju (2), liekamieji poslinkiai  $\mathbf{u}_r = \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}$  ir liekamosios įrašos  $\mathbf{S}_r = \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda}$  išreiškiamos per influentines liekamųjų poslinkių ir liekamųjų įrašų matricas  $\mathbf{H}$  ir  $\mathbf{G}$  (Gervytė, Jarmolajeva 2013).

(1)–(5) uždavinys priklauso kontinualaus optimizavimo netiesinio neiškilojo matematinio programavimo uždavinių grupei. Daugiaekstremiškumą lemia matematinio programavimo griežtumo sąlyga (3) (Bazaraa *et al.* 2004).

(1)–(5) uždavinio nežinomieji yra ribinių įrašų vektorius  $\mathbf{S}_0$  ir plastinių daugiklių vektorius  $\boldsymbol{\lambda}$ . Šio modelio trūkumas yra tas, kad neįvertinamas konstrukcijos nusikrovimo fenomenas. Leistinosios poslinkių kitimo ribos (5) standumo sąlygose  $\mathbf{u}_{\text{min}}$  ir  $\mathbf{u}_{\text{max}}$  gali būti nustatomos pagal projektavimo normų reikalavimus (STR 2.05.04:2003; Atkočiūnas, Venskus 2011; Palizzolo *et al.* 2014).

Optimizavimo uždavinyje dažnai yra standumo (tinkamumo) sąlygos:  $\mathbf{u}_{\text{min}} \leq \mathbf{u}_{ej} + \mathbf{u}_r \leq \mathbf{u}_{\text{max}}$ . Tačiau iš


tikrųjų  $\mathbf{u}_r$  nėra fiksuotas, jo kitimo ribos gali būti tokios:  $\mathbf{u}_{r, \text{inf}} \leq \mathbf{u}_r \leq \mathbf{u}_{r, \text{sup}}$ . Išsprendus optimizavimo uždavinį esant minėtoms sąlygoms, skenuojant galima patikrinti  $\mathbf{u}_r$  ribas, t. y., ar nepažeistos tinkamumo būvio sąlygos.

Gali būti taip, jog nors  $\mathbf{u}_r$  ir tenkina ribas, tačiau kartu su tampriaisiais poslinkiais  $\mathbf{u}_{ej}$  nėra tenkinamos tinkamumo sąlygos, tai rodo, kad reikalinga tobulinti tinkamumo sąlygų ribojimo užrašymą optimizavimo uždavinio (1)–(5) matematiniam modelyje. Šie patikslinimai yra itin svarbūs, projektuojant realias konstrukcijas.

### Apie daugiaatramės sijos priklausomybes

Liekamųjų įlinkių priklausomybė nuo apkrovimo istorijos iliustruojama daugiaatramės sijos (3 pav.) prisitaikomumo proceso nagrinėjimu. Nagrinėjamai sijai parenkamas realus IPE 160 dvitėjo skerspjūvis. Pagrindinės geometrinės skerspjūvio charakteristikos pateiktos 1 lentelėje.

1 lentelė. IPE 160 skerspjūvio geometrinės charakteristikos  
Table 1. Geometrical characteristics of IPE 160 cross-section

	$A, \text{cm}^2$	$I_y, \text{cm}^4$	$W_{pl}, \text{cm}^3$
	20,1	869,0	124,0

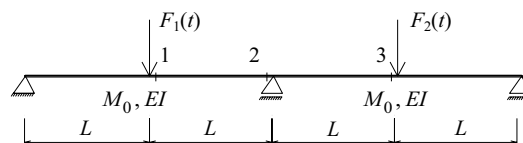
Ribinis skerspjūvio lenkimo momentas apskaičiuojamas pagal tokią formulę (Atkočiūnas, Karkauskas 2010):

$$M_0 = \sigma_y W_{pl}, \quad (6)$$

čia  $M_0$  – ribinis lenkimo momentas;  $\sigma_y$  – medžiagos takumo įtempis (tempiant);  $W_{pl}$  – plastinis skerspjūvio atsparumo momentas. Sija veikiama kartotinės kintamosios apkrovos, t. y. veikia dvi sutelktosios, nekeičiančios ženklo jėgos  $F_1(t)$  ir  $F_2(t)$ , jų kitimo ribos  $0 \leq F_1(t) \leq F_{1, \text{sup}}$ ,  $0 \leq F_2(t) \leq F_{2, \text{sup}}$ . Apkrovos viršutinės ribos parenkamos tokios:

$$F_{1, \text{sup}} = 73,00 \text{ kN}, \quad F_{2, \text{sup}} = 73,62 \text{ kN}.$$

Nagrinėjamos sijos diskretinio modelio įtempių būvį nusako momentų vektorius  $\mathbf{M} = [M_1 \ M_2 \ M_3]^T$ , deformuotą būvį – deformacijų  $\boldsymbol{\Theta} = [\Theta_1 \ \Theta_2 \ \Theta_3]^T$  ir poslinkių  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$  vektoriai.



3 pav. Dviejų angų sijos, veikiamos kartotinės kintamosios apkrovos, diskretinis modelis

Fig. 3. Discrete model of the two span beam loaded with variable repeated load

## Prisitaikomumo būvio apkrovos identifikacija

Nagrinėjama sija ribinės KKA optimizavimo uždavinio matematinis modelis užrašomas taip (Atkočiūnas, Karkauskas 2010):

$$\text{rasti} \quad \max (F_{1, \text{sup}} + F_{2, \text{sup}}), \quad (7)$$

$$\text{kai} \quad \mathbf{AM}_r = \mathbf{0}, \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{e, \text{max}} \leq \mathbf{M}_0, \quad (9)$$

$$-\mathbf{M}_r - \mathbf{M}_{e, \text{min}} \leq \mathbf{M}_0, \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_{e, \text{max}} = \alpha_{\text{sup}} \mathbf{F}_{\text{sup}}, \quad \mathbf{M}_{e, \text{min}} = \alpha_{\text{inf}} \mathbf{F}_{\text{sup}}, \quad (11)$$

$$\mathbf{F}_{\text{sup}} = [F_{1, \text{sup}} \quad F_{2, \text{sup}}]^T, \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_{\text{sup}} \geq \mathbf{0}, \quad (13)$$

čia  $F_{1, \text{sup}}, F_{2, \text{sup}}$  – ieškomos sutelktųjų jėgų viršutinės kitimo ribos;  $\mathbf{M}_r$  – liekamieji momentai (jie taip pat yra (7)–(13) uždavinio nežinomieji). (8) yra pusiausvyros lygtys. (9) ir (10) takumo sąlygose naudojamas ribinių lenkimo momentų vektorius  $\mathbf{M}_0$  ir tamprios sijos didžiausių ir mažiausių lenkimo momentų reikšmių vektoriai  $\mathbf{M}_{e, \text{max}}$  ir  $\mathbf{M}_{e, \text{min}}$ . Kaip minėta, (7)–(13) matematiname modelyje nežinomieji yra jėgų kitimo ribos  $F_{1, \text{sup}}, F_{2, \text{sup}}$  ir liekamieji momentai  $\mathbf{M}_r$ . Momentai  $\mathbf{M}_{e, \text{max}}, \mathbf{M}_{e, \text{min}}$  yra kintamųjų  $F_{1, \text{sup}}, F_{2, \text{sup}}$  funkcijos (11);  $\alpha$  – tamprios konstrukcijos lenkimo momentų influentinė matrica. Teigiami jos elementai sujungti į matricą  $\alpha_{\text{sup}}$ , neigiami į matricą  $\alpha_{\text{inf}}$ . Žinomieji yra ribiniai lenkimo momentai  $\mathbf{M}_0$ : taigi (7)–(13) uždavinys yra patikrinamasis. Tikrinama, kokią apkrovą gali atlaikyti žinomų parametrų konstrukcija.

Išsprendus (7)–(13) uždavinį plastiškosios irties metu gaunami tokie ieškomieji dydžiai:

– liekamieji lenkimo momentai,  $kNm$ :

$$\mathbf{M}_r = [-0,7668 \quad 1,5337 \quad 0,7668]^T;$$

– didžiausiosios koncentruotų apkrovų reikšmės,  $kN$ :

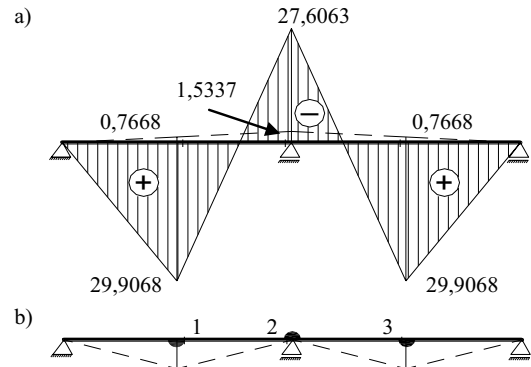
$$\mathbf{F}_{\text{sup}} = [73,6168 \quad 73,6168]^T.$$

Pagal (7)–(13) uždavinio (11) formules apskaičiuojamos tampriųjų lenkimo momentų didžiausiosios ir mažiausiosios reikšmės,  $kNm$  ( $\mathbf{F}_{\text{sup}} = [73,6168 \quad 73,6168]^T$ ):

$$\mathbf{M}_{e, \text{max}} = [29,9068 \quad 27,6063 \quad 6,9016]^T;$$

$$\mathbf{M}_{e, \text{min}} = [-6,9016 \quad 0 \quad -29,9068]^T.$$

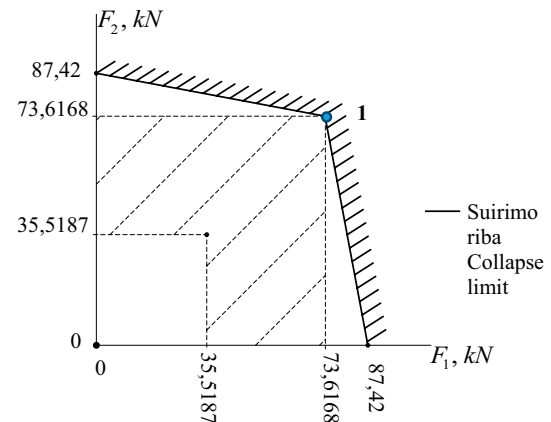
Suminės tampriųjų ir liekamųjų momentų reikšmės parodo plastinių lankstų susidarymo vietas plastiškosios suirties momentu (4 pav.).



4 pav. Tampriųjų ir liekamųjų (punktyrinė linija) lenkimo momentų diagrama (a),  $kNm$ ; plastinių lankstų susidarymo vietas ir suirimo mechanizmas (b)

Fig. 4. Elastic and plastic (dashed line) bending moments diagram (a),  $kNm$ ; places of plastic hinges and failure mechanism (b)

Išsamesnis galimų sijos suirimo mechanizmų nagrinėjimas leido išsiaiškinti prisitaikomumo sritį (5 pav.).



5 pav. Sijos plastinio darbo formavimosi diagrama  
Fig. 5. Diagram of plastic work development of the beam

Kiekviena iš reikšmių 87,42  $kN$  reiškia plastiškąją suirtį, veikiant tik vienai jėgai: arba  $F_{1, \text{sup}}$ , arba  $F_{2, \text{sup}}$ . Taip pat nustatyta, kad konstrukcijoje, jėgoms veikiant atskirai, pirmųjų plastinių deformacijų atsiranda, kai kiekviena pasiekia reikšmę 35,5187  $kN$ . (7)–(13) uždavinio optimalus sprendinys leidžia gauti 1 tašką (5 pav.), t. y. konstrukcijos plastiškosios suirties stadiją, veikiant jėgų kombinacijai  $\mathbf{F}_{\text{sup}}$ .

Sumažinus, pavyzdžiui, pirmosios jėgos  $F_1$  viršutinę kitimo ribą iki 73,0  $kN$  gaunama sijos prisitaikomumo būvį užtikrinanti apkrova, būtent:

$$0 \leq F_1 \leq F_{1, \text{sup}} = 73,0 \text{ kN},$$

$$0 \leq F_2 \leq F_{2, \text{sup}} = 73,62 \text{ kN}.$$

Veikiant tokiai apkrovai, niekada nesusiformuos bent du vienpusiai plastiniai lankstai, lemiantys plastiškąją suirtį (Tangaramvong, Tin-Loi 2013).

## Prisitaikomumo būvio įrašų ir poslinkių nustatymas

Nagrinėjamos lenkiamos sistemos analizės uždavinio statinė formuluotė sudaryta panaudojus ekstreminį energinį principą, susijusį su standžiojo kūno papildomo deformavimo energija. Kai nagrinėjama tik lenkiama konstrukcija, šį energinį principą atitinka toks ekstremumo uždavinio matematinis modelis (Atkočiūnas 2011; Gervytė, Jarmolajeva 2013):

$$\text{rasti} \quad \min \left( \frac{1}{2} \mathbf{M}_r^T \mathbf{D} \mathbf{M}_r \right), \quad (14)$$

$$\text{kai} \quad \mathbf{A} \mathbf{M}_r = \mathbf{0} \quad (15)$$

$$\varphi_{\max} = \mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_r - \mathbf{M}_{e, \max} \geq \mathbf{0} \quad (16)$$

$$\varphi_{\min} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{e, \min} \geq \mathbf{0}. \quad (17)$$

(14)–(17) uždavinijje nežinomieji yra tik liekamieji momentai  $\mathbf{M}_r$ . Visi kiti dydžiai duoti:  $\mathbf{D}$  – pasiduo damumo matrica;  $\mathbf{M}_0$  – ribinių lenkimo momentų vektorius;  $\mathbf{M}_{e, \max}$ ,  $\mathbf{M}_{e, \min}$  – tamprios sijos didžiausių ir mažiausių lenkimo momentų vektoriai. Optimalus sprendinys žymimas  $\mathbf{M}_r^*$ .

Jeigu yra tenkinamos analizės uždavinio statinės formuluotės (16) ir (17) takumo sąlygos, vadinasi, konstrukcija prisitaiko. Pagal matematinio programavimo teoriją tai būtų teiginys apie tai, kad leistinųjų sprendinių sritis (15)–(17) yra netuščia (Bazaraa *et al.* 2004). Analizės uždavinys gali būti sprendžiamas tik tuomet, kai žinomos lenkimo momentų  $\mathbf{M}_{e, \max}$  ir  $\mathbf{M}_{e, \min}$  reikšmės (nesvarbu, ar būvis analizuojamas pasitelkus apkrovimo istoriją etapais, ar tiesiog esant fiksuotoms apkrovų reikšmėms pagal formules ( $\mathbf{M}_{e, \max} = \boldsymbol{\alpha}_{\text{sup}} \mathbf{F}_{\text{sup}}$ ,  $\mathbf{M}_{e, \min} = \boldsymbol{\alpha}_{\text{inf}} \mathbf{F}_{\text{sup}}$ )).

Analizės uždavinio kinematinė formuluotė sudaryta panaudojus ekstreminį energinį principą, susijusį su papildomu išorinių jėgų darbu. Kai nagrinėjama tik lenkiama konstrukcija, šį energinį principą atitinka toks ekstremumo uždavinio matematinis modelis (Atkočiūnas 2011; Liepa, Karkauskas 2012; Gervytė, Jarmolajeva 2013):

$$\text{rasti} \quad \max \left( \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \mathbf{M}_r^T \mathbf{D} \mathbf{M}_r + (\mathbf{M}_{e, \max} - \mathbf{M}_0) \boldsymbol{\lambda}_{\max} - \\ -(\mathbf{M}_{e, \min} - \mathbf{M}_0) \boldsymbol{\lambda}_{\min} \end{array} \right), \quad (18)$$

$$\text{kai} \quad \mathbf{D} \mathbf{M}_r + \boldsymbol{\lambda}_{\max} - \boldsymbol{\lambda}_{\min} - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\max} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{\min} \geq \mathbf{0}. \quad (20)$$

Optimalus (18)–(20) uždavinio sprendinys yra liekamųjų momentų  $\mathbf{M}_r^*$ , liekamųjų poslinkių  $\mathbf{u}_r^*$ , plastinių daugiklių  $\boldsymbol{\lambda}_{\max}^*$  ir  $\boldsymbol{\lambda}_{\min}^*$  vektoriai.  $\mathbf{D} \mathbf{M}_r$  šiuo atveju yra tampriosios deformacijos, sukeltos liekamųjų momentų.

Prisitaikomumo būvio analizės uždavinys leidžia nagrinėti apkrovimo istorijos įtaką konstrukcijos deformuotam būviui. Tam tikslui yra atliekamas etapinis skaičiavimas pagal analizės uždavinio matematinius modelius: statinę (14)–(17) ir kinematinę (18)–(20) formuluotes.

Nagrinėjamai sijai bendrasis analizės uždavinys prisitaikomumo sąlygomis sprendžiamas pasitelkus (14)–(17) ir (18)–(20) matematinius modelius. Sija veikiama kartotinės apkrovos, t. y. dviejų sutelktųjų jėgų  $F_1(t)$  ir  $F_2(t)$ , kintančių nepriklausomai viena nuo kitos, tačiau užtikrinančių sijos prisitaikomumo būvį. Jų kitimo ribos buvo nustatytos anksčiau:  $0 \leq F_1(t) = 73,0 \text{ kN}$  ir  $0 \leq F_2(t) = 73,62 \text{ kN}$ .

Gaunami vektoriai:

$$\mathbf{M}_{e, \max} = \boldsymbol{\alpha}_{\text{sup}} \mathbf{F}_{\text{sup}} = [29,6563 \quad 27,4913 \quad 6,8437]^T,$$

$$\mathbf{M}_{e, \min} = \boldsymbol{\alpha}_{\text{inf}} \mathbf{F}_{\text{sup}} = [-6,9019 \quad 0 \quad -29,9081]^T.$$

(14)–(17) ir (18)–(20) uždavinių sprendimo rezultatai pateikti 2 lentelėje. Taigi prisitaikomumo būvis pasiekiamas esant tokiems liekamiesiems momentams,  $\text{kNm}$ :

$$\mathbf{M}_r^* = [-0,7681 \quad 1,5363 \quad 0,7681]^T$$

ir poslinkiams,  $m$ :

$$\mathbf{u}_r^* = [-0,2156 \quad 0,9342]^T \cdot 10^{-3}.$$

Plastinės deformacijos atsirado tik trečiame pjūvyje:

$$\boldsymbol{\theta}_p = [0 \quad 0 \quad -0,0023]^T.$$

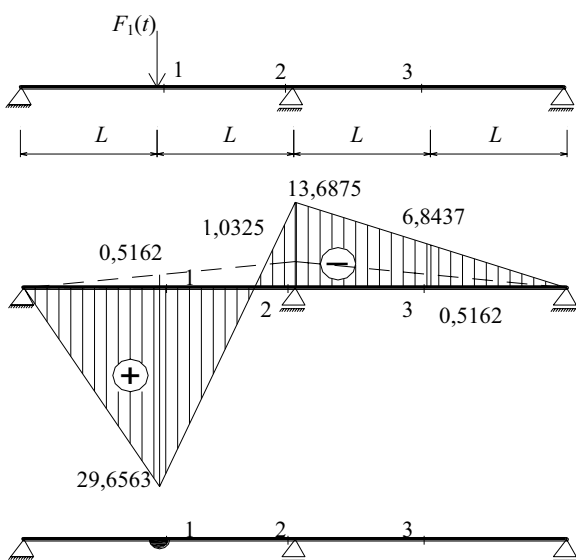
## Nemonotoniškas sijos liekamųjų poslinkių kitimas

Etapais nagrinėjant prisitaikomumo procesą, galima pastebėti nemonotonišką poslinkių (įlinkių) kitimą.

*I etapas.* Tariama, kad pradžioje veikia tik jėga  $F_1$ , pamažu pasiekdama savo viršutinę kitimo ribą  $73,0 \text{ kN}$ . Skaičiuojamoji schema ir gauti rezultatai pateikti 6 pav.: tamprieji sijos lenkimo momentai  $\mathbf{M}_e = [29,6563 \quad -13,6875 \quad -6,8437]^T$  veikiant jėgai  $F_1 = 73,0 \text{ kN}$  pažymėti ištisine linija, o liekamieji momentai – punktyrine. Tik pirmame pjūvyje momentas  $M_{e1} = 29,6563 \text{ kNm}$  viršija ribinio lenkimo momento reikšmę  $M_0 = 29,14 \text{ kNm}$ , todėl tik tame pjūvyje pasireiškia pirmosios plastinės deformacijos ir formuojasi pusiausvyros lygtis  $\mathbf{A} \mathbf{M}_r = \mathbf{0}$  tenkinantys liekamieji momentai. Išsprendus analizės uždavinio kinematinę formuluotę (18)–(20) gaunami liekamųjų poslinkių ir plastinių deformacijų dydžiai:

$$u_{r1} = 0,6279 e^{-3} m, \quad u_{r2} = -0,1449 e^{-3} m,$$

$$\boldsymbol{\theta}_{p1} = 0,0015.$$



6 pav. Sijos skaičiuojamoji schema ir gauti rezultatai veikiant jėgai  $F_1 = 73,0 \text{ kN}$   
 Fig. 6. Calculation scheme of the beam structure and results obtained from  $F_1 = 73,0 \text{ kN}$

*II etapas.* Toliau nagrinėjamas sijos prisitaikomumo būvį lemiančios apkrovimo istorijos tęsinys. Sija nukraunama, t. y. nukraunama  $F_1$  jėga, tačiau ji išlaiko pirmame pjūvyje pasireiškusias plastines deformacijas  $\Theta_{p1} = 0,0015$  ir dėl tų plastiųjų deformacijų atsiradusius liekamuosius momentus:

$$\mathbf{M}_r = [-0,5162 \quad 1,0325 \quad 0,5162]^T, \text{ kNm}.$$

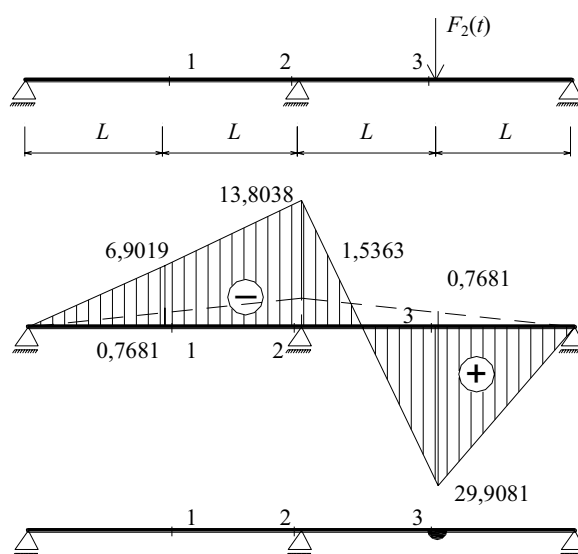
Toliau kvazistatiškai pridedama jėga  $F_2$ . Ši jėga veikia tol, kol pasiekia savo kitimo viršutinę ribą  $73,62 \text{ kN}$ . Gauti rezultatai pavaizduoti 7 pav.: tamprios sijos skaičiavimo lenkimo momentai veikiant jėgai  $F_2 = 73,62 \text{ kN}$  pažymėti ištisine linija, o liekamieji lenkimo momentai – punktyrine. Iš tampraus atsako lenkimo momentų diagramos matyti, kad jėga  $F_2$  lemia plastiųjų deformacijų prieaugio  $\Delta\Theta_{p3}$  susidarymą trečiame pjūvyje.

Išsprendus analizės uždavinio kinematinę formuluotę, gaunami liekamųjų poslinkių ir plastiųjų deformacijų prieaugiai:  $\Delta u_{r1} = -0,2156e^{-3} \text{ m}$ ,  $\Delta u_{r2} = 0,9342e^{-3} \text{ m}$ ,  $\Delta\Theta_{p3} = -0,0023$ .

Iš 7 pav. esančios lenkimo momentų diagramos matyti, kad I pjūvyje įvyko nusikrovimas, tačiau negalima pamiršti, kad šiame pjūvyje jau yra plastiųjų deformacijų  $\Theta_{p1} = 0,0015$ .

Suminiai liekamieji momentai, poslinkiai ir plastinės deformacijos apkrovimo ciklo  $\tau$  pabaigoje pateikti 2 lentelėje.

$\mathbf{M}_r(\tau) = [-0,7681 \quad 1,5363 \quad 0,7681]^T \text{ kNm}$  liekamieji momentai užtikrina tai, kad naujų plastiųjų defor-



7 pav. Sijos skaičiuojamoji schema ir gauti rezultatai, nagrinėjant apkrovimo istoriją, kai nukraunama  $F_1$  ir paskui užkraunama  $F_2 = 73,62 \text{ kN}$   
 Fig. 7. Calculation scheme of the beam structure and results obtained after unloading  $F_1$  and then loading  $F_2 = 73,62 \text{ kN}$

macijų nebeatsiras, kad ir kokios būtų jėgų  $F_1, F_2$  kitimo trajektorijos (uždavinio sąlygose pasirinktose ribose). O tai ir yra konstrukcijos prisitaikomumo reiškinys: apkrovimo pradžioje pasiekus takumo ribą, atsiradusios liekamosios įrašos kartu su kintamąja (tampriąja) įrašų dalimi neviršija leistinų ribų, konstrukcija prisitaiko prie duotosios apkrovos.

2 lentelė. Sijos bendrojo analizės uždavinio rezultatai  
 Table 2. Results of beam's common analysis problem

Bendras analizės užd.	$\mathbf{M}_{e, \max} = [29,6563 \quad 27,4913 \quad 6,8437]^T, \text{ kNm}$
	$\mathbf{M}_{e, \min} = [-6,9019 \quad 0 \quad -29,9081]^T, \text{ kNm}$
	$\mathbf{M}_r^* = [-0,7681 \quad 1,5363 \quad 0,7681]^T, \text{ kNm}$
	$\mathbf{u}_r^* = [-0,2156 \quad 0,9342]^T \cdot 10^{-3}, \text{ m}$
	$\Theta_p = [0 \quad 0 \quad -0,0023]^T$
I etapas	$\mathbf{M}_r = [-0,5162 \quad 1,0325 \quad 0,5162]^T, \text{ kNm}$
	$\mathbf{u}_r = [0,6279 \quad -0,1449]^T \cdot 10^{-3}, \text{ m}$
	$\Theta_p = [0,0015 \quad 0 \quad 0]^T$
II etapas, suminiai	$\mathbf{M}_r(\tau) = [-1,2843 \quad 2,5688 \quad 1,2843]^T, \text{ kNm}$
	$\mathbf{u}_r(\tau) = [0,4123 \quad 0,7893]^T \cdot 10^{-3}, \text{ m}$
	$\Theta_p(\tau) = [0,0015 \quad 0 \quad -0,0023]^T$

Galima nesunkiai įsitikinti, kad nuo kitų apkrovimo istorijų (pvz., kai pradžioje veikianti jėga  $F_1$  keičiasi, nepasiekdama viršutinės savo kitimo ribos) prisitaikomumo būvis pasiekiamas, esant dar ir kitokiam plastinių deformacijų pasiskirstymui.

### Konstrukcijų įtempių ir deformacijų būvių skenavimo metodas

Kryptingas etapinio skaičiavimo organizavimas leidžia nenagrinėti visų galimų apkrovimo istorijų. Tam apkrovų veikimo sritis skirstoma į skenavimo zonas. Zonos viršūnės rodo tarpines apkrovos kombinacijas, kurioms esant yra sprendžiamas (14)–(17) analizės uždavinys ir gaunami išskomieji dydžiai (liekamieji lenkimo momentai, liekamieji poslinkiai ir plastinės deformacijos).

I skenavimo etapas	
$\min \frac{1}{2} \mathbf{M}_{r1} \mathbf{D} \mathbf{M}_{r1},$ $\mathbf{A} \mathbf{M}_{r1} = \mathbf{0},$ $\mathbf{M}_{r1} + \mathbf{M}_{e, \max} \leq \mathbf{M}_0,$ $-\mathbf{M}_{r1} - \mathbf{M}_{e, \min} \leq \mathbf{M}_0.$	
Kai $F_1 = 50,0 \text{ kN}; F_2 = 30,0 \text{ kN}$	
$\mathbf{M}_{r1} = [0 \ 0 \ 0]^T;$ $\mathbf{u}_{r1} = [0 \ 0]^T;$ $\boldsymbol{\theta}_{p1} = [0 \ 0 \ 0]^T.$	
II skenavimo etapas	
$\min \frac{1}{2} \Delta \mathbf{M}_{r2} \mathbf{D} \Delta \mathbf{M}_{r2},$ $\mathbf{A} \Delta \mathbf{M}_{r2} = \mathbf{0},$ $\Delta \mathbf{M}_{r1} + \mathbf{M}_{e, \max} + \Delta \mathbf{M}_{r2} \leq \mathbf{M}_0,$	
Kai $F_1 = 73,0 \text{ kN}; F_2 = 30,0 \text{ kN}$ .	
$\Delta \mathbf{M}_{r1} = [-0,5162 \ 1,0325 \ 0,5162]^T, \text{ kNm};$ $\mathbf{M}_{r, \text{sum}} = \mathbf{M}_{r1} + \Delta \mathbf{M}_{r1} =$ $= [-0,5162 \ 1,0325 \ 0,5162]^T, \text{ kNm};$ $\Delta \mathbf{u}_{r1} = [0,6279 \ -0,1449]^T \cdot 10^{-3}, \text{ m};$ $\mathbf{u}_{r, \text{sum}} = \mathbf{u}_{r1} + \Delta \mathbf{u}_{r1} = [0,6279 \ -0,1449]^T \cdot 10^{-3}, \text{ m};$ $\Delta \boldsymbol{\theta}_{p1} = [0,0015 \ 0 \ 0]^T.$	

Skenavimo metodas paremtas progresine analize, t. y. plečiant apkrovos kitimo sritis, siekiama plėsti galimų plastinių deformacijų atsiradimo zonas, kiekvieną kartą nustatant gaunamus liekamuosius poslinkius (arba jų prieaugius). Liekamieji poslinkiai gali kisti nemonotoniškai ir tai galima užfiksuoti skenavimo metodu (8 pav.).

Taigi, prisitaikomumo būvis gali būti pasiektas esant skirtingoms liekamųjų poslinkių  $\mathbf{u}_r$  reikšmėms. Išanalizavę

III skenavimo etapas	
$\min \frac{1}{2} \Delta \mathbf{M}_{r1} \mathbf{D} \Delta \mathbf{M}_{r1},$ $\mathbf{A} \Delta \mathbf{M}_{r1} = \mathbf{0},$ $\mathbf{M}_{r1} + \mathbf{M}_{e, \max} + \Delta \mathbf{M}_{r1} \leq \mathbf{M}_0,$ $-\mathbf{M}_{r1} - \mathbf{M}_{e, \min} - \Delta \mathbf{M}_{r1} \leq \mathbf{M}_0.$	
Kai $F_1 = 45,0 \text{ kN}; F_2 = 73,62 \text{ kN}$ .	
$\Delta \mathbf{M}_{r2} = [-0,7681 \ 1,5363 \ 0,7681]^T, \text{ kNm};$ $\mathbf{M}_{r, \text{sum}} = \Delta \mathbf{M}_{r1} + \Delta \mathbf{M}_{r2} =$ $= [-1,2843 \ 2,5688 \ 1,2843]^T, \text{ kNm};$ $\Delta \mathbf{u}_{r2} = [-0,2156 \ 0,9342]^T \cdot 10^{-3}, \text{ m};$ $\mathbf{u}_{r, \text{sum}} = \Delta \mathbf{u}_{r1} + \Delta \mathbf{u}_{r2} = [0,4123 \ 0,7893]^T \cdot 10^{-3}, \text{ m};$ $\Delta \boldsymbol{\theta}_{p2} = [0 \ 0 \ -0,0023]^T;$ $\boldsymbol{\theta}_{p, \text{sum}} = \Delta \boldsymbol{\theta}_{p1} + \Delta \boldsymbol{\theta}_{p2} = [0,0015 \ 0 \ -0,0023]^T.$	
IV skenavimo etapas	
$\min \frac{1}{2} \Delta \mathbf{M}_{r3} \mathbf{D} \Delta \mathbf{M}_{r3},$ $\mathbf{A} \Delta \mathbf{M}_{r3} = \mathbf{0},$ $\Delta \mathbf{M}_{r2} + \mathbf{M}_{e, \max} + \Delta \mathbf{M}_{r3} \leq \mathbf{M}_0,$ $-\Delta \mathbf{M}_{r2} - \mathbf{M}_{e, \min} - \Delta \mathbf{M}_{r3} \leq \mathbf{M}_0.$	
Kai $F_1 = 73,0 \text{ kN}; F_2 = 73,62 \text{ kN}$ .	
$\Delta \mathbf{M}_{r3} = [-0,7681 \ 1,5363 \ 0,7681]^T, \text{ kNm};$ $\mathbf{M}_{r, \text{sum}} = \Delta \mathbf{M}_{r2} + \Delta \mathbf{M}_{r3} =$ $= [-1,2843 \ 2,5688 \ 1,2843]^T, \text{ kNm};$ $\mathbf{u}_{r, \text{sum}} = \Delta \mathbf{u}_{r2} + \Delta \mathbf{u}_{r3} = [-0,4312 \ 1,8684]^T \cdot 10^{-3}, \text{ m};$ $\Delta \boldsymbol{\theta}_{p3} = [0 \ 0 \ -0,0023]^T;$ $\boldsymbol{\theta}_{p, \text{sum}} = \Delta \boldsymbol{\theta}_{p2} + \Delta \boldsymbol{\theta}_{p3} = [0 \ 0 \ -0,0046]^T.$	

8 pav. Skenavimo metodas

Fig. 8. Scanning method

keletą skenavimo zonų, apibendriname jų sprendimo rezultatus (šiuo atveju liekamųjų poslinkių vektorius  $\mathbf{u}_r$ ): išrenkame liekamųjų poslinkių kitimo viršutinės  $\mathbf{u}_{r, \text{sup}}$  ir apatines  $\mathbf{u}_{r, \text{inf}}$  ribas:  $\mathbf{u}_{r, \text{sup}} = [0, 6279 \quad 1, 8684]^T \cdot 10^{-3}, m$ ,  $\mathbf{u}_{r, \text{inf}} = [-0, 4312 \quad -0, 1449]^T \cdot 10^{-3}, m$ .

Skenavimas leidžia įsitikinti, jog prisitaikiosios konstrukcijos liekamieji įlinkiai (poslinkiai) kartu su tampriojo skaičiavimo įlinkiais (poslinkiais) neviršija norminių reikalavimų. Tačiau ir *skenavimo metodas*, negalintis realizuoti visų apkrovimo istorijų, gali „nepastebėti“ pavojingų liekamųjų įlinkių (poslinkių)  $\mathbf{u}_r$ , kurie kartu su tampriojo atsako įlinkiais (poslinkiais)  $\mathbf{u}_e$  gali pažeisti reglamentuojamas normose ribines reikšmes.

Taip atsiveria naujos galimybės praktinei patikslinto konstrukcijos optimizavimo (1)–(5) uždavinio realizacijai. Skaičiavimai atlikti, pasitelkus *MatLab* kompiuterinį programavimo paketą.

## Išvados

1. Etapinis prisitaikomumo būvio nagrinėjimas parodė, jog esant duotai kartotinei kintamajai apkrovai, konstrukcija gali prisitaikyti, patirdama skirtingus įlinkius (poslinkius).
2. Autorių sukurta nauja skenavimo metodika leidžia skaitiškai apibrėžti liekamųjų poslinkių nemonotoniško kitimo ribas.
3. Prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo uždavinių matematinuose modeliuose racionalu taikyti naują deformuoto būvio *skenavimo metodą* skerspjuvių nusikrovimui identifikuoti.

## Literatūra

- Atkočiūnas, J. 2011. *Optimal shakedown design of elastic-plastic structures*. Vilnius: Technika. 300 p.
- Atkočiūnas, J.; Karkauskas, R. 2010. *Tampriųjų plastinių strypinių sistemų optimizavimas*. Vilnius: Technika. 29 p. <http://dx.doi.org/10.3846/1137-S>
- Atkočiūnas, J.; Venskūnas, A. 2011. Optimal shakedown design of frames under stability conditions according to standards, *Computers and Structures* 89(3–4): 435–443. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2010.11.014>
- Bazaraa, M. S.; Sherali, H. D.; Shetty, C. M. 2004. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. New York: John Wiley & Sons Ltd.
- Čyras, A. 1983. *Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures*. Chichester: Ellis Horwood Limited. 121 p.
- Gervytė, A.; Jarmolajeva, E. 2013. Analysis and optimization of elastic-plastic framing structure under complex constraints, *Engineering Structures and Technologies* 5(4): 159–166. <http://dx.doi.org/10.3846/2029882X.2014.898366>

- Koiter, W. T. 1960. General theorems for elastic–plastic solids, in I. N. Sneddon, R. Hill (Eds.). *Progress in solid mechanics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 165–221.
- König, J. A. 1987. *Shakedown of elastic-plastic structures*. Amsterdam: Elsevier. 214 p.
- Liepa, L.; Karkauskas, R. 2012. Tampriųjų plastinių geometriškai netiesinių rėmų skaičiavimas, *Mokslas – Lietuvos ateitis* 4(4): 326–334.
- Palizzolo, L.; Caffarelli, A.; Tabbluso, P. 2014. Minimum volume design of structures with constraints on ductility and stability, *Engineering Structures* 68(1): 47–56. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.02.025>
- Skaržauskas, V.; Jankovski, V.; Atkočiūnas, J. 2009. Optimisation des structures métalliques élastoplastiques sous conditions de rigidité et de plasticité données, *European Journal of Environmental and Civil Engineering* 13(10): 1203–1219. <http://dx.doi.org/10.1080/19648189.2009.9693186>
- STR 2.05.04:2003. *Statybos techninis reglamentas. Poveikiai ir apkrovos*.
- Tangaramvong, S.; Tin-Loi, F. 2013. Automatic identification of the worst load combination for structural safety assessment using an optimization approach, *Engineering Structures* 56: 2287–2298. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.08.036>
- Weichert, D.; Maier, G. 2002. *Inelastic behavior of structures under variable repeated loads*. New York, Vienna: Springer-Verlag. 393 p. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7091-2558-8>
- Weichert, D.; Ponter, A. 2009. *Limit states of materials and structures*. Wien: Springer.

## RESIDUAL DISPLACEMENTS' PROGRESSIVE ANALYSIS OF THE MULTISUPPORTED BEAM

L. Liepa, A. Gervytė, E. Jarmolajeva, J. Atkočiūnas

### Abstract

This paper focuses on a shakedown behaviour of the ideally elasto-plastic beams system under variable repeated load. The mathematical models of the analysis problems are created using numerical methods, extremum energy principles and mathematic programming. It is shown that during the shakedown process the residual displacements vary non-monotonically. By solving analysis problem, where the load locus is being progressively expanded, it is possible to determine the upper and lower bounds of residual displacements. Suggested methods are illustrated by solving multisupported beam example problem. The results are obtained considering principle of the small displacements.

**Keywords:** variable repeated load, shakedown, extremum energy principles, residual displacements.